Concours commun

Mines-Ponts

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2023

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - MPI

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Préliminaires

Dans tout le sujet, l'intervalle $]-1,+\infty[$ de $\mathbf{R}$ est appelé I et σ et f sont les fonctions, de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, définies par :

$$\sigma(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}$$

et

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^x \ \mathrm{d}t.$$

On se propose, dans cette épreuve, d'étudier f (domaine de définition, régularité, variations, convexité, développement éventuel en série entière,...) puis, dans la dernière partie, de montrer qu'elle est la seule fonction numérique à vérifier certaines propriétés.

1 Calcul de $\sigma(1)$

1 $\triangleright$ Déterminer le domaine de définition de σ puis justifier que σ est continue sur celui-ci.

2 $\triangleright$ Exhiber deux nombres réels α et β tels que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \int_0^{\pi} (\alpha t^2 + \beta t) \cos(nt) \ \mathrm{d}t = \frac{1}{n^2},$$

puis vérifier que si $t \in]0,\pi]$, alors :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}.$$

3 $\triangleright$ Justifier que, si φ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,\pi]$ dans $\mathbf{R}$, alors

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^{\pi} \varphi(t)\sin(xt) \ \mathrm{d}t = 0,$$

et en conclure que

$$\sigma(1) = \frac{\pi^2}{6}\cdot$$

2 Équivalents

4 ▷ Déterminer le domaine de définition de f puis vérifier que

$$\forall x \in I,\ (x+1)f(x) = (x+2)f(x+2). \tag{1}$$

5 ▷ Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$, décroissante et convexe sur I.

6 ▷ Donner un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers -1.

7 ▷ Montrer que pour tout entier naturel n,

$$f(n)f(n+1) = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

puis que :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\cdot$$

8 ▷ Représenter graphiquement f en exploitant au mieux les résultats précédents.

3 Développement en série entière

Si $n \in \mathbf{N}$, on note D_n l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\ln(\sin(t)))^n \,\mathrm{d}t$.

9 ▷ Justifier que, si $n \in \mathbf{N}$, l'intégrale généralisée D_n est convergente, puis montrer que

$$D_1 = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t)) \,\mathrm{d}t.$$

10 ▷ Calculer $f'(0)$ et $f'(1)$.

11 ▷ Vérifier que si $n \in \mathbf{N}^*$, alors

$$(-1)^n D_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^n}{\sqrt{\mathrm{e}^{2u}-1}} \,\mathrm{d}u,$$

puis que

$$D_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^n n!$$

12 ▷ Démontrer que f est développable en série entière sur $]-1, 1[$.

4 Convergence de suite de fonctions

On se propose dans cette partie de calculer $f''(0)$. Dans ce but, on considère deux nombres réels strictement positifs a et b, et on pose

$$\rho = \frac{b-a}{b+a}\cdot$$

On appelle Ψ l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \ \Psi(x) = \ln(a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x).$$

13 ▷ Montrer que Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, puis que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\Psi'(x) = 4\sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \sin(2kx).$$

14 ▷ En déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\Psi(x) = 2\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) - 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2kx)}{k}\,\rho^k.$$

15 ▷ En conclure que

$$\int_0^{\pi} \Psi(x)^2 dx = 4\pi\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^2 + 2\pi\sigma(\rho^2).$$

On définit les suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ par

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, a_n = \frac{1}{n+1} \text{ et } b_n = \frac{n}{n+1}.$$

16 ▷ Établir la convergence simple de la suite d'applications $(\Psi_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, de $]0,\pi]$ dans $\mathbf{R}$, définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \forall t \in]0,\pi],\ \Psi_n(t) = \ln(a_n^2\cos^2 t + b_n^2 \sin^2 t).$$

En déduire $f''(0)$.

5 Convexité logarithmique

Une application h d'un intervalle non trivial J de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est dite ln-convexe si, et seulement si, elle est à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$ et $\ln \circ h$ est convexe sur J.

17 ▷ Vérifier que f est une application de I dans $\mathbf{R}$ ln-convexe.

On souhaite désormais déterminer toutes les applications de I dans $\mathbf{R}$ qui sont ln-convexes et qui vérifient la propriété (1), voir question 4.

On appelle $\tilde{f}$ l'application de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$, définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}^+,\ \tilde{f}(x) = \ln(f(2x)).$$

18 ▷ Montrer que

$$\forall p \in \mathbf{N}^*, \forall x \in \mathbf{R}_+,\ \tilde{f}(x+p) = \tilde{f}(x) + \sum_{k=0}^{p-1} \ln\left(\frac{2x+2k+1}{2x+2k+2}\right).$$

19 ▷ On suppose ici que $x \in \mathbf{R}_+^*$, $(n,p) \in (\mathbf{N}^*)^2$ et $x \leqslant p$. Vérifier que

$$\tilde{f}(n) - \tilde{f}(n-1) \leqslant \frac{\tilde{f}(n+x) - \tilde{f}(n)}{x} \leqslant \frac{\tilde{f}(n+p) - \tilde{f}(n)}{p}$$

et que $(\tilde{f}(n+x) - \tilde{f}(n))$ admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$.

20 ▷ En conclure que f est la seule application de I dans $\mathbf{R}$, qui soit ln-convexe, qui vérifie (1) et telle que
$$f(0) = \frac{\pi}{2}.$$

21 ▷ Plus généralement, déterminer, si $T \in \mathbf{R}_+^*$, toutes les applications g de $]-T, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$, ln-convexes et vérifiant
$$\forall t \in]-T, +\infty[, \ (t+T)g(t) = (t+2T)g(t+2T).$$

22 ▷ Existe-t-il une application h, de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et ln-convexe, vérifiant
$$\forall t \in \mathbf{R}, \ (t+T)h(t) = (t+2T)h(t+2T)\,?$$