A2024 – PHYSIQUE I PC

Concours commun
Mines-Ponts

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2024

PREMIÈRE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

PHYSIQUE I - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Analyse physique d'un spa

La pandémie de COVID-19 a profondément changé la consommation de loisirs des français. N'étant pas sûrs de pouvoir voyager ou que les campings et plages soient accessibles, nombreux sont ceux qui ont cherché à se procurer du bien-être dans leur propre habitation en achetant une piscine ou un spa gonflable. Dans ce problème plusieurs aspects de l'utilisation du spa sont abordés, de la première installation au stockage hivernal.

FIGURE 1 – Photographie du spa étudié

Les applications numériques comporteront deux chiffres significatifs. Les données nécessaires à ces applications numériques et certaines définitions habituelles sont rassemblées en fin d'énoncé. **Elles sont complétées par un formulaire**. Les vecteurs sont généralement notés avec des flèches ($\vec{v}$ de norme v) et sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires ($\widehat{u}_x$).

I Installation du spa

I.A Gonflage

Le manuel d'utilisation fournit quelques données numériques :

Hauteur du spa gonflé sans couverture	$H = 1{,}0\,\mathrm{m}$
Hauteur d'eau	$h_\mathrm{e} = 3/4\,\mathrm{m} = 75\,\mathrm{cm}$
Diamètre intérieur	$d_\mathrm{int} = \sqrt{2}\,\mathrm{m} = 1{,}4\,\mathrm{m}$
Diamètre extérieur	$d_\mathrm{ext} = 2{,}0\,\mathrm{m}$
Temps de gonflage	$t_\mathrm{g} = 10\,\mathrm{min}$
Seuil d'ouverture de la valve de surpression	$\delta p = 0{,}1\,\mathrm{bar}$

L'enveloppe du spa se gonfle d'air, considéré comme un gaz parfait, grâce à une pompe contenue dans l'unité de contrôle. On considère que l'enveloppe prend sa forme définitive sans pli dès que la pression intérieure à l'enveloppe atteint la pression de l'air extérieur supposée égale à 1 bar. On ne prendra pas en compte l'épaisseur du tapis de fond en plastique du spa.

❏ – **1**. Quel est le débit volumique moyen D_p de la pompe en litres par seconde ?

❏ – **2**. Une fois gonflé en un temps t_g, le volume du spa reste constant. Si l'utilisateur oublie d'arrêter la pompe, au bout de combien de temps la valve de surpression s'ouvre-t-elle ? On supposera ici que la température de l'air dans l'enveloppe reste constante.

❏ – **3**. Le spa est gonflé en t_g un matin à 15°C. En supposant que la pression extérieure et que le volume de l'enveloppe du spa restent constants au cours de la journée mais que la température extérieure peut augmenter, à partir de quelle température la valve de surpression s'ouvre-t-elle ?

I.B Chauffage de l'eau

Le spa est équipé d'une unité de contrôle composée notamment d'une pompe de chauffage permettant de faire circuler l'eau à travers une source chaude. La vitesse de ce système de chauffage indiquée sur le manuel du spa est de $v_c = 2°\,\mathrm{C \cdot h^{-1}}$ jusqu'à une température maximale de $40°\,\mathrm{C}$.

❏ – **4**. Estimer la durée nécessaire pour atteindre la température maximale de $40°\,\mathrm{C}$ depuis une température initiale de $20°\,\mathrm{C}$.

La puissance de chauffage de l'unité de contrôle indiquée sur le manuel est $\mathscr{P}_c = 2{,}5\,\mathrm{kW}$: est-ce cohérent avec le résultat précédent ?

Il est également possible de laisser naturellement chauffer l'eau du spa en plein soleil, sans utiliser la pompe de chauffage. Mais cela dépend de la météo, de l'heure d'exposition, et même *a priori* de l'altitude.

❏ – **5**. À quel moment de la journée le chauffage par le Soleil est-il le plus efficace ? Justifier la réponse.

On cherche à savoir si l'eau chauffe plus vite en plein soleil si le spa est installé à haute altitude sans considérer une éventuelle baisse de la température due à cette élévation. Lorsqu'elle est éclairée par une onde électromagnétique $\vec{E} = E_0 \cos\left[\omega\left(t - x/c\right)\right]\widehat{e_z}$ issue du rayonnement solaire, une molécule d'air (essentiellement $\mathtt{N}_2$ ou $\mathtt{O}_2$) se polarise selon le moment dipolaire $\vec{p} = p_0(\omega)\cos(\omega t)\widehat{e_z}$, avec $p_0(\omega) = \dfrac{e^2 E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$, où $\omega_0 = 2{,}3 \times 10^{16}\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$, e et m étant respectivement la charge et la masse de l'électron.

❏ – **6**. Justifier qualitativement le fait que l'on puisse écrire l'onde électromagnétique issue du rayonnement solaire sous cette forme.

Justifier qualitativement l'apparition de cette polarisation.

Que représente ω_0 ?

On admet que chaque molécule d'air rayonne la puissance moyenne $\mathscr{P} = \dfrac{p_0^2\omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$.

❏ – **7**. Montrer que, pour une pulsation donnée, l'éclairement (ici assimilé à la puissance surfacique moyenne) décroit selon l'axe de propagation du rayon solaire selon une loi du type $\mathcal{E}_\omega(x) = \mathcal{E}_\omega(0)\exp\left(-x/H_\omega\right)$. On introduira n, le nombre de molécules d'air par unité de volume. Après avoir exprimé H_ω en fonction de n, e, μ_0, m et $\kappa = \omega_0/\omega$ on vérifiera la cohérence dimensionnelle de son expression.

❏ – **8**. Le Soleil est un corps noir (voir formulaire) dont la température de surface est $T_S = 5800\,\mathrm{K}$. Estimer la valeur de H_ω.

Sachant que l'épaisseur caractéristique de l'atmosphère est de l'ordre de 100 km, que peut-on dire de l'effet d'une augmentation d'altitude sur le chauffage de l'eau du spa ?

II Utilisation du spa

II.A Pertes calorifiques

L'eau du spa est chauffée à $T_{\text{int}} = 38°\mathrm{C}$ et le système de chauffage est arrêté. Le spa est installé sur la pelouse du jardin, que l'on assimile à une épaisseur $e_h = 5\,\mathrm{mm}$ d'herbe tassée sous l'effet du poids. On suppose le sol et l'air extérieur à $T_{\text{ext}} = 25°\mathrm{C}$. La température de l'eau variant très lentement, on se place en régime quasi stationnaire. Toutes les parties en contact avec l'air sont sièges d'échange conducto-convectif de coefficient h_a. On rappelle que la puissance s'écrit dans ce cas $\mathscr{P} = h_{\mathrm{a}} S \Delta T$, où S est la surface d'échange et ΔT l'écart de température sur cette surface. On néglige l'épaisseur de l'enveloppe en plastique du spa.

❑ – **9**. Définir la notion de résistance thermique.

Exprimer, en fonction des variables du problème, la résistance thermique de conduction des parois verticales du spa notée R_{p} (on se placera en symétrie cylindrique), ainsi que celle, notée R_{t}, du « tapis » d'herbe sous l'installation.

Les valeurs numériques avec un seul chiffre significatif de ces deux quantités sont respectivement $R_{\mathrm{p}} = 3\,\mathrm{K\cdot W^{-1}}$ et $R_{\mathrm{t}} = 5 \times 10^{-2}\,\mathrm{K\cdot W^{-1}}$. On donne aussi celle de la résistance thermique due aux échanges convectifs entre l'eau et la paroi verticale du spa $R_{\mathrm{pc}} = 2 \times 10^{-2}\,\mathrm{K\cdot W^{-1}}$ ainsi que celle due aux échanges convectifs entre la surface de l'eau et l'air $R_{\mathrm{s}} = 6 \times 10^{-2}\,\mathrm{K\cdot W^{-1}}$.

❑ – **10**. Montrer que l'écart de température est de la forme $T_{\mathrm{int}}(t) - T_{\mathrm{ext}} = (T_{\mathrm{int}}(0) - T_{\mathrm{ext}})\, e^{-\frac{t}{\tau}}$ et calculer le temps caractéristique τ dont on commentera la valeur.

Pour minimiser les pertes calorifiques et donc la consommation d'énergie, le manuel préconise de couvrir le spa à l'aide de sa couverture lorsque personne ne l'utilise, ainsi que de l'installer sur une toile de sol constituée d'un tapis de bulles d'air d'épaisseur $e_{\mathrm{t}} = 5\,\mathrm{mm}$. Pour simplifier, on considère que la couverture du spa est gonflée d'air et qu'elle vient combler exactement l'espace entre la surface de l'eau et le haut du spa. Elle est donc d'une épaisseur constante $e_{\mathrm{s}} = 25\,\mathrm{cm}$ et elle recouvre l'intégralité du spa.

❑ – **11**. Estimer le gain obtenu sur le temps caractéristique en installant la toile de sol et la couverture.

❑ – **12**. La toile de sol et la couverture étant installées, quelle puissance faudrait-il fournir pour maintenir constante la température de l'eau du spa ?

II.B Module de commande : maintien en température

L'unité de contrôle a besoin de mesurer la température pour assurer certaines fonctions comme son maintien automatique à une certaine valeur. Le principe est d'allumer et d'éteindre le module de chauffage avec des interrupteurs commandés.
La température de l'eau est mesurée à l'aide d'une thermistance. On peut modéliser ce composant par un cylindre métallique de section S, de longueur L, de conductivité électrique σ et dont la résistance électrique R_{th} dépend de sa température.

❑ – **13**. Sans prendre en compte les effets de la température, en négligeant les effets de bords et en régime permanent, montrer que la résistance de ce cylindre serait $R_{\text{él}} = L/(\sigma S)$.

Afin d'interpréter la dépendance de la résistance avec la température, on adopte le modèle de Drude qui consiste à appliquer la théorie cinétique des gaz aux électrons libres dans le métal. Ces derniers subissent des collisions aléatoires avec les ions beaucoup plus lourds et considérés immobiles.
Dans le modèle de Drude, chaque électron de vitesse $\vec{v}$ est soumis d'une part à la force due au champ électrique $\vec{E}$ supposé constant qui apparaît en appliquant une différence de potentiel aux extrémités du métal, et d'autre part, à une force de type frottement fluide $\vec{F}_{\mathrm{d}} = -m\vec{v}/\tau_{\mathrm{d}}$. Cette dernière permet de modéliser macroscopiquement l'effet d'un très grand nombre de collisions microscopiques aléatoires de moyenne nulle.

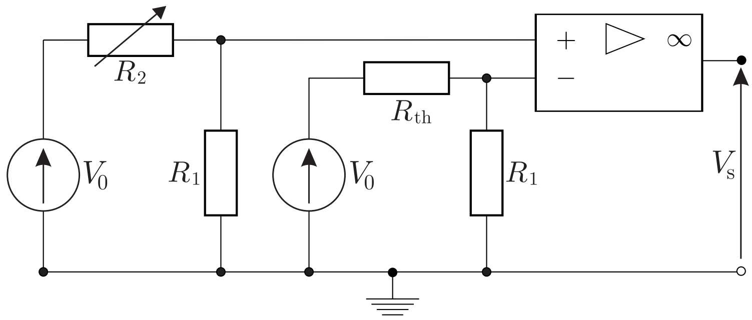
❑ – **14**. Montrer que la vitesse d'un électron est constante au bout d'un temps grand devant τ_{d}. En déduire une expression de la conductivité électrique en fonction de m, e, τ_{d} et de la densité volumique n_e d'électron dans le métal.

❏ – **15**. En notant $\vec{v}_0$ la vitesse d'un électron juste après une collision à l'instant t_0, comment s'exprime sa vitesse $\vec{v}$ juste avant la collision suivante δt plus tard ?

En moyennant le résultat sur un très grand nombre de collisions, proposer une interprétation physique pour τ_d.

En déduire que la résistance du métal augmente lorsque sa température augmente.

Dans la suite, on notera $R_\text{th} = R_0\,[1 + \alpha(T - T_\text{ref})]$ la résistance de la thermistance en cuivre à la température T, avec $\alpha = 4 \times 10^{-3}\,\text{K}^{-1}$ et $T_\text{ref} = 20°\,\text{C}$.
On s'intéresse au mode « maintien de température » de l'unité de contrôle, utilisé lorsque l'eau du spa a déjà été chauffée à la température souhaitée T_max. Ce mode maintient la température dans l'intervalle $[T_\text{min}, T_\text{max}]$, où $T_\text{min} = T_\text{max} - 2°\text{C}$. On a donc besoin de deux interrupteurs commandés en température. Un montage possible pour un interrupteur est donné sur la figure 2, où les deux générateurs de tension constante V_0 sont identiques. L'Amplificateur Linéaire Intégré (ALI) idéal fonctionne ici en saturation, il n'a alors que deux tensions de sorties possibles $V_\text{s} = \pm V_\text{sat}$, cette caractéristique permet de commander un dispositif, non étudié ici, créant une fonction ON/OFF pour le chauffage.
Les règles du fonctionnement à saturation sont précisées sur la droite de la figure 2.



$V_\text{s} = +V_\text{sat}$ tant que $V^+ > V^-$

et

$V_\text{s} = -V_\text{sat}$ tant que $V^+ < V^-$

FIGURE 2 – Montage à amplificateur linéaire

❏ – **16**. À partir du montage de la figure 2, exprimer les tensions V^+ et V^- en fonction de V_0, R_1, R_2 et R_th. En déduire à quelle condition sur la température T on reste à saturation haute à $V_\text{s} = +V_\text{sat}$.

Pour quelle température, la sortie de l'ALI change-t-elle d'état ?

Comment ce réglage est-il fait sur le spa ?

Quelle précision relative sur la valeur de R_2 est-elle nécessaire pour régler la température a un degré près ?

Un module de commande plus complet mais non étudié ici permet de maintenir la température dans l'intervalle souhaité.

III Vidange du spa

Pour remplacer régulièrement l'eau du spa ou pour le stockage hivernal, une ouverture est prévue dans le fond du spa avec un raccord pour un tuyau d'arrosage, ce qui permet d'évacuer le contenu du spa vers le réseau des eaux usées. On note ℓ la longueur du tuyau d'arrosage parfaitement horizontal et rectiligne (on suppose qu'il n'y a aucune pente dans la pelouse) et d_t son diamètre intérieur constant très petit devant le diamètre intérieur d_int du spa.
On note $h_\text{e}(t)$ la hauteur d'eau contenue dans le spa à l'instant t. Pendant la vidange, on suppose l'écoulement incompressible et on ne prend pas en compte la dissipation visqueuse dans l'écoulement.

On note $\vec{v}_{\mathrm{s}}(\mathrm{A},t)$ la vitesse de l'eau en un point A dans le spa, et $\vec{v}_{\mathrm{t}}(\mathrm{B},t)$ celle de l'eau en un point B dans le tuyau.

❏ – **17**. Pourquoi peut-on considérer $\vec{v}_{\mathrm{s}}(\mathrm{A},t)$ et $\vec{v}_{\mathrm{t}}(\mathrm{B},t)$ uniformes sur toute la section de leur canalisation ?

Quelle est la relation entre v_{s} et v_{t} ?

❏ – **18**. On se place en régime permanent, donc avec $h_{\mathrm{e}}(t) = h_{\mathrm{e},0} =$ constante , exprimer la vitesse v_{t} de l'eau dans le tuyau en fonction de g et de $h_{\mathrm{e},0}$.

Pour connaître la durée de vidange du spa, on se place en régime quasi-permanent, ainsi h_{e} varie au cours du temps mais lentement.

❏ – **19**. Quelle équation différentielle est vérifiée par $h_{\mathrm{e}}(t)$?

En déduire la durée t_{v} de la vidange du spa en fonction de d_{t}, d_{int}, g et $h_{\mathrm{e}}(0)$.

Afin de valider l'hypothèse de régime quasi-permanent, on cherche la durée du régime transitoire pendant laquelle la vitesse de l'eau dans le tuyau passe de 0 à la vitesse v_{t} déterminée à la question **18**. On suppose cette durée suffisamment courte pour considérer que la hauteur d'eau reste égale à $h_{\mathrm{e}}(0)$ pendant le régime transitoire.

❏ – **20**. En intégrant l'équation d'Euler le long d'une ligne de courant, établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse $v_{\mathrm{t}}(t)$ de l'eau dans le tuyau. Cette équation ne dépend que des seuls paramètres ℓ, g et $h_{\mathrm{e}}(0)$.

❏ – **21**. Résoudre l'équation précédente sous la forme $v_{\mathrm{t}}(t) = v_1 f(t/\tau_{\mathrm{e}})$ où f est une fonction trigonométrique hyperbolique et dans laquelle on exprimera d'une part v_1 en fonction de g et $h_{\mathrm{e}}(0)$ et d'autre part τ_{e} en fonction de ℓ et v_1.

Déterminer la durée caractéristique du régime transitoire.

Conclure sur l'approximation de régime quasi-permanent : comment faut-il choisir la longueur du tuyau ?

❏ – **22**. Dans tout ce qui précède, le spa est vidé sans sa couverture. En supposant celle-ci parfaitement étanche, est-il possible de vider le spa avec la couverture ? Conclure.

À toutes fins utiles...

Données physiques

- Masse de l'électron : $m = 9{,}1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
- Charge de l'électron : $e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$
- Accélération de la pesanteur : $g = 9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$
- Permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}9 \times 10^{-12}\ \mathrm{F \cdot m^{-1}}$
- Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{kg \cdot m \cdot A^{-2} \cdot s^{-2}}$
- Constante d'Avogadro : $N_A = 6{,}0 \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$
- Constante molaire des gaz parfaits : $R = 8{,}3\,\mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$

Pour l'eau considérée dans le sujet on prendra

- Masse volumique : $\rho_{\mathrm{e}} = 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$
- Capacité thermique massique : $c_{\mathrm{e}} = 4{,}2 \times 10^3\ \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$
- Viscosité dynamique (supposée indépendante de la température) : $\eta_{\mathrm{e}} = 10^{-3}\,\mathrm{Pa \cdot s}$

Pour l'air considéré dans le sujet on prendra

- Conductivité thermique : $\lambda_{\mathrm{a}} = 2{,}5 \times 10^{-2}\ \mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{K}^{-1}$
- Coefficient d'échange conducto-convectif : $h_{\mathrm{a}} = 10\,\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{K}^{-1}$
- Masse volumique : $\rho_{\mathrm{a}} = 1{,}2\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$
- Coefficient adiabatique : $\gamma_{\mathrm{a}} = 1{,}4$
- Capacité thermique massique : $c_{\mathrm{a}} = 710\ \mathrm{J} \cdot \mathrm{K}^{-1} \cdot \mathrm{kg}^{-1}$

Pour l'herbe considéré dans le sujet on prendra :

- Conductivité thermique : $\lambda_{\mathrm{h}} = 3{,}5 \times 10^{-2}\,\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{K}^{-1}$

Formulaire

- Pour les fractions de cercles on prendra $\dfrac{\pi}{3} = 1{,}0$; $\dfrac{\pi}{4} = 0{,}8$ et $\dfrac{\pi}{5} = 0{,}6$.
- On rappelle la loi du déplacement de Wien selon laquelle la longueur d'onde $\lambda_{\max}$ à laquelle un corps noir émet le plus de flux lumineux énergétique est inversement proportionnelle à la température T_S de sa surface. C'est-à-dire $\lambda_{\max} \times T_S = 2\,900\,\mu\mathrm{m.K}$.
- On donne l'équation d'Euler pour un fluide dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ dont le champ de vitesse est $\vec{v}(\vec{r},t)$, la masse volumique $\rho(\vec{r},t)$ et le champ de pression $P(\vec{r},t)$:

$$\rho\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v}\right] = \rho\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \vec{v}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{v}\right)\right] = \rho\vec{g} - \vec{\nabla}P$$

- On rappelle que

$$\int \frac{\mathrm{dx}}{1 - x^2} = \arg\tanh(x) + \mathrm{cste}$$

FIN DE L'ÉPREUVE