ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS, CHIMIE PARISTECH.

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2020

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 3 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'objectif du problème est d'établir, par des méthodes euclidiennes, des théorèmes d'approximation par des polynômes ou des exponentielles-polynômes de certaines fonctions définies sur $[0,+\infty[$ ou sur $\mathbf{R}$.

Les parties I et II sont indépendantes. La partie III utilise les résultats des parties I et II.

Étant donné un intervalle I de $\mathbf{R}$, on appelle *fonction polynomiale sur I* toute fonction de la forme $f : I \to \mathbf{R}, x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \lambda_k x^k$, où n est un entier naturel et $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ des nombres réels.

I. Résultats préliminaires

I.1. Étude d'une série entière

Pour tout réel x strictement positif, on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

1) Montrer que la fonction Γ est bien définie, et à valeurs strictement positives.

2) À l'aide d'une intégration par parties que l'on justifiera avec soin, montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.

Soit α un réel strictement supérieur à -1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose $a_n = \dfrac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$.

3) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.

4) Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-x)^{\alpha+1}} \text{ pour tout } x \in]-R, R[.$$

On pourra effectuer une permutation des symboles $\sum_{n=0}^{\infty}$ et $\int_0^{+\infty}$, que l'on justifiera soigneusement.

I.2. Projections orthogonales

Dans cette partie, E désigne un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, pas nécessairement de dimension finie, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\| \cdot \|$ la norme associée à ce produit scalaire, définie par $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ pour tout $x \in E$.

Soit F un sous-espace vectoriel différent de $\{0\}$ et de dimension finie de E.

5) Donner la définition de la projection orthogonale π_F sur F.

On fixe $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de F, et x un vecteur de E.

6) Montrer que $\pi_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$.

7) Montrer enfin que

$$\|x - \pi_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2.$$

II. Polynômes de Laguerre

Dans toute cette partie, on fixe un réel $\alpha > -1$, et on note E_α l'ensemble des fonctions continues $f : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 dx$ est convergente.

8) Montrer que, pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, $|ab| \leq \dfrac{a^2 + b^2}{2}$.

9) En déduire que, si f et g sont deux éléments de E_α, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)g(x)dx$ est convergente.

10) En déduire que E_α est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $C([0, +\infty[, \mathbf{R})$ des fonctions continues de $[0, +\infty[$ vers $\mathbf{R}$.

11) Montrer que toute fonction polynomiale sur $[0, +\infty[$ est élément de E_α.

Pour tout entier naturel n, on définit les fonctions

$$\varphi_n :]0, +\infty[\to \mathbf{R}, x \mapsto x^{n+\alpha} e^{-x}$$

et

$$\psi_n :]0, +\infty[\to \mathbf{R}, x \mapsto x^{-\alpha} e^x \varphi_n^{(n)}(x)$$

où la notation $\varphi_n^{(n)}$ désigne la dérivée d'ordre n de φ_n (avec la convention $\varphi_0^{(0)} = \varphi_0$).

12) Calculer ψ_0, ψ_1 et ψ_2.

13) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, montrer que la fonction ψ_n est polynomiale. Préciser son degré et son coefficient dominant.

Dans la suite, on identifie ψ_n à son unique prolongement continu à $[0, +\infty[$, qui est une fonction polynomiale sur $[0, +\infty[$. Cela permet de considérer ψ_n comme un élément de E_α, ce qu'on fera désormais.

Pour tout $(f, g) \in E_\alpha^2$, on pose

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)g(x)dx.$$

14) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E_α.

Dans la suite, on note $\| \cdot \|_\alpha$ la norme associée à ce produit scalaire, définie par

$$\|f\|_\alpha = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x} x^\alpha f(x)^2 dx \right)^{1/2} \text{ pour tout } f \in E_\alpha.$$

15) Soit n un entier ≥ 1. Pour tout entier $k \in [\![0, n-1]\!]$, établir que

$$\varphi_n^{(k)}(x) \to 0 \text{ quand } x \text{ tend vers } 0 \text{ par valeurs strictement positives,}$$

et que

$$\varphi_n^{(k)}(x) = o\left(e^{-\frac{x}{2}}\right) \text{ quand } x \to +\infty.$$

16) Soit m et n deux entiers naturels. Montrer que

$$\langle \psi_m, \psi_n \rangle = (-1)^n \int_0^{+\infty} \psi_m^{(n)}(x) \varphi_n(x) dx$$

En déduire que la famille $(\psi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

17) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\|\psi_n\|_\alpha^2 = n!\,\Gamma(n + \alpha + 1)$ (la fonction Γ a été définie dans la partie I).

III. Approximation

On conserve les hypothèses et notations de la partie II. Pour tout entier naturel k, on définit la fonction

$$f_k : [0, +\infty[\to \mathbf{R}, x \mapsto e^{-kx},$$

qui est élément de E_α (on ne demande pas de le vérifier).

Pour tout $N \in \mathbf{N}$, on note V_N le sous-espace vectoriel de E_α engendré par la famille finie $(\psi_n)_{0 \leq n \leq N}$, et on note π_N la projection orthogonale de E_α sur V_N.

18) Soit $k \in \mathbf{N}$. Montrer l'existence de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle f_k, \psi_n \rangle^2}{\|\psi_n\|_\alpha^2}$, et calculer sa valeur.

19) En déduire que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\|f_k - \pi_N(f_k)\|_\alpha \to 0$ quand $N \to +\infty$.

Dans la suite, on note $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de E_α constitué des fonctions polynomiales.

20) Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathcal{P}$ telle que $\|f_k - p\|_\alpha \leq \varepsilon$.

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ une fonction continue tendant vers 0 en $+\infty$. Il est facile de vérifier (ce n'est pas demandé) que $f \in E_\alpha$.

21) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel n ainsi que des réels $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ tels que

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k \right\|_\alpha \leq \varepsilon.$$

On pourra utiliser la fonction

$$g : [0, 1] \to \mathbf{R}, t \mapsto \begin{cases} f(-\ln t) \text{ si } t \in]0, 1] \\ 0 \text{ si } t = 0 \end{cases}$$

et le résultat **admis** suivant : si $\phi : [0, 1] \to \mathbf{R}$ est une fonction continue, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale $p : [0, 1] \to \mathbf{R}$ telle que $|\phi(t) - p(t)| \leq \varepsilon$ pour tout $t \in [0, 1]$.

22) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathcal{P}$ telle que $\|f - p\|_\alpha \leq \varepsilon$.

23) Soit $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue, paire et nulle en dehors d'un segment $[-A, A]$ $(A > 0)$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale $p : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(h(x) - p(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \right)^2 dx \leq \varepsilon.$$

On pourra appliquer le résultat de la question **22)** à la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbf{R}, x \mapsto h\left(\sqrt{x}\right) e^{\frac{x}{2}}$ et à un α bien choisi.

*On peut montrer que le résultat de la question **23)** est en réalité valable pour toute fonction $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue et de carré intégrable sur $\mathbf{R}$.*

FIN DU PROBLÈME